

**Universität
Stuttgart**

**Fachbereich
Mathematik**

**Orthogonale Polynomlösungen
von Differenzengleichungen vierter Ordnung**

Peter A. Lesky

Preprint 2006/002

Universität Stuttgart

Fachbereich Mathematik

Orthogonale Polynomlösungen von Differenzengleichungen vierter Ordnung

Peter A. Lesky

Preprint 2006/002

Fachbereich Mathematik
Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
D-70 569 Stuttgart

E-Mail: `preprints@mathematik.uni-stuttgart.de`

WWW: `http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/preprints`

ISSN **1613-8309**

© Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck nur mit Genehmigung des Autors.

LaTeX-Style: Winfried Geis, Thomas Merkle

Orthogonale Polynomlösungen von Differenzengleichungen vierter Ordnung

von Peter A. Lesky, Stuttgart

Nach den Untersuchungen von Differentialgleichungen vierter Ordnung auf (positiv definite) orthogonale Polynomlösungen durch H.L. Krall ([1], [2]), A.M. Krall ([3], [4]), W.N. Everitt ([5]) und P.A. Lesky ([6], [7]) ist es naheliegend, auch **Differenzengleichungen vierter Ordnung** auf (positiv definite) orthogonale Polynomlösungen zu untersuchen. In [1]-[7] sind folgende Polynomsysteme dargestellt: Hermite, Laguerre, Jacobi, Laguerretyp, Legendretyp, Jacobityp (unendliche Systeme) und Romanovski-Jacobi, Romanovski-Bessel, Romanovski-Pseudojacobi (endliche Systeme, [8]). Die Systeme Hermite, Laguerretyp, Legendretyp und Jacobityp zeichnen sich dadurch aus, daß sie über **dreigliedrige Rekursionen** für die Polynomkoeffizienten entstehen (Hermite und Laguerretyp als symmetrische Polynome). Hier erfolgt eine entsprechende Untersuchung von Differenzengleichungen vierter Ordnung über dreigliedrige Rekursionen für die Polynomkoeffizienten.

1 Polynomlösungen von linearen homogenen Differentialgleichungen vierter Ordnung

Für die Polynomlösungen $y_n(x)$ vom n -ten Grad in x ($n = 0, 1, 2, \dots$) der Differentialgleichung

$$P_4(x)y_n^{(IV)}(x) + P_3(x)y_n'''(x) + P_2(x)y_n''(x) + P_1(x)y_n'(x) = \lambda_n y_n(x) \quad (1.1)$$

zeigt der Ansatz

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \frac{x^k}{k!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; a_{n,n} \neq 0), \quad (1.2)$$

daß für die Koeffizienten von (1.1) nur Polynome

$$\begin{aligned} P_4(x) &= e_{4,0} + e_{4,1}x + e_{4,2}x^2 + e_{4,3}x^3 + e_{4,4}x^4, & P_3(x) &= e_{3,0} + e_{3,1}x + e_{3,2}x^2 + e_{3,3}x^3, \\ P_2(x) &= e_{2,0} + e_{2,1}x + e_{2,2}x^2, & P_1(x) &= e_{1,0} + e_{1,1}x \end{aligned} \quad (1.3)$$

in Frage kommen. Nach dem Einsetzen von (1.2) in (1.1) liefert der Koeffizientenvergleich bei $\frac{x^n}{n!}$ die **Eigenwerte**

$$\lambda_n = n \{ e_{1,1} + (n-1)e_{2,2} + (n-1)(n-2)e_{3,3} + (n-1)(n-2)(n-3)e_{4,4} \} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.4)$$

Der Koeffizientenvergleich bei $\frac{x^k}{k!}$ liefert

$$\begin{aligned} & (k-n)e_{1,1}a_{n,k} + e_{1,0}a_{n,k+1} + (k-n)(k+n-1)e_{2,2}a_{n,k} + ke_{2,1}a_{n,k+1} + e_{2,0}a_{n,k+2} + \\ & + (k-n)[k^2 + kn + n^2 - 3(k+n) + 2]e_{3,3}a_{n,k} + k(k-1)e_{3,2}a_{n,k+1} + ke_{3,1}a_{n,k+2} + \\ & + e_{3,0}a_{n,k+3} + (k-n)[k^3 + k^2n + kn^2 + n^3 - 6(k^2 + kn + n^2) + 11(k+n) - 6] \cdot \\ & \cdot e_{4,4}a_{n,k} + k(k-1)(k-2)e_{4,3}a_{n,k+1} + k(k-1)e_{4,2}a_{n,k+2} + ke_{4,1}a_{n,k+3} + e_{4,0}a_{n,k+4} \\ & = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit wird (1.5) noch folgendermaßen umgeordnet:

$$\begin{aligned}
& a_{n,k}(k-n) \{e_{1,1} + (k+n-1)e_{2,2} + [k^2 + kn + n^2 - 3(k+n) + 2]e_{3,3} + \\
& + [k^3 + k^2n + kn^2 + n^3 - 6(k^2 + kn + n^2) + 11(k+n) - 6]e_{4,4}\} + \\
& + a_{n,k+1} \{e_{1,0} + ke_{2,1} + k(k-1)e_{3,2} + k(k-1)(k-2)e_{4,3}\} + \\
& + a_{n,k+2} \{e_{2,0} + ke_{3,1} + k(k-1)e_{4,2}\} + a_{n,k+3} \{e_{3,0} + ke_{4,1}\} + a_{n,k+4}e_{4,0} = 0 \\
& (k = n, n-1, \dots, 1, 0; a_{n,n} \neq 0, a_{n,n+1} = a_{n,n+2} = a_{n,n+3} = a_{n,n+4} = 0).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Die folgenden vier Fälle entstehen mit der Dreigliedrigkeit von (1.6):

Hermite: $e_{4,0} = 1; e_{4,1} = e_{4,2} = e_{4,3} = e_{4,4} = 0; e_{3,1} = 2\varepsilon (\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\});$
 $e_{3,0} = e_{3,2} = e_{3,3} = 0; e_{2,0} = 2\varepsilon\tau (\tau \in \mathbb{R}), e_{2,2} = 4\varepsilon^2; e_{2,1} = 0;$
 $e_{1,1} = 4\varepsilon^2(\tau - 1); e_{1,0}$ (symmetrisch).

Laguerreotyp: $e_{4,2} = 1; e_{4,0} = e_{4,1} = e_{4,3} = e_{4,4} = 0; e_{3,1} = 4, e_{3,2} = 2;$
 $e_{3,0} = e_{3,3} = 0; e_{2,1} = v + 4 (v \in \mathbb{R}), e_{2,2} = 1; e_{2,0} = 0; e_{1,0} = v - 2, e_{1,1} = v.$

Legendreotyp: $e_{4,0} = 1, e_{4,2} = -2, e_{4,4} = 1; e_{4,1} = e_{4,3} = 0; e_{3,1} = -8, e_{3,3} = 8;$
 $e_{3,0} = e_{3,2} = 0; e_{2,0} = -4(t+3) (t \in \mathbb{R}), e_{2,2} = 4(t+3); e_{2,1} = 0;$
 $e_{1,1} = 8t; e_{1,0} = 0$ (symmetrisch).

Jacobityp: $e_{4,2} = 1, e_{4,3} = -2, e_{4,4} = 1; e_{4,0} = e_{4,1} = 0;$
 $e_{3,1} = 4, e_{3,2} = -2(r+4) (r \in \mathbb{R}), e_{3,3} = 2(r+2); e_{3,0} = 0;$
 $e_{2,1} = -r(f+4) (f \in \mathbb{R}), e_{2,2} = r(r+f+3); e_{2,0} = 0;$
 $e_{1,0} = r(2-f), e_{1,1} = r(rf-2).$

Bei den Systemen Laguerre, Jacobi, Romanovski-Jacobi, Romanovski-Bessel und Romanovski-Pseudojacobi bleiben in (1.6) fünfgliedrige Koeffizientenrekursionen bestehen.

2 Polynomlösungen von linearen homogenen Differenzengleichungen vierter Ordnung

Für die Polynomlösungen $y_n(x)$ vom n -ten Grad in x ($n = 0, 1, 2, \dots$) der Differenzengleichung*

$$Q_4(x)\Delta^4 y_n(x) + Q_3(x)\Delta^3 y_n(x) + Q_2(x)\Delta^2 y_n(x) + Q_1(x)\Delta y_n(x) = \mu_n y_n(x+2) \tag{2.1}$$

($\Delta y_n(x) = y_n(x+1) - y_n(x); \Delta^j y_n(x) = \Delta(\Delta^{j-1} y_n(x))$) zeigt der Ansatz ([8])

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; b_{n,n} \neq 0), \tag{2.2}$$

*Das „Störglied“ $\mu_n y_n(x+2)$ wird im Hinblick auf die Orthogonalität verwendet.

daß für die Koeffizienten von (2.1) nur Polynome

$$\begin{aligned} Q_4(x) &= f_{4,0} + f_{4,1}x + f_{4,2}x^2 + f_{4,3}x^3 + f_{4,4}x^4, & Q_3(x) &= f_{3,0} + f_{3,1}x + f_{3,2}x^2 + f_{3,3}x^3, \\ Q_2(x) &= f_{2,0} + f_{2,1}x + f_{2,2}x^2, & Q_1(x) &= f_{1,0} + f_{1,1}x \end{aligned} \quad (2.3)$$

in Frage kommen. Vor dem Einsetzen von (2.2) in (2.1) erfolgen für die Polynome (2.3) noch gewisse Vorbereitungen:

$$\begin{aligned} x \binom{x+k-2}{k-r} &= (k-r+1) \binom{x+k-2}{k-r+1} + (2-r) \binom{x+k-2}{k-r} \quad (r=1,2,3,4); \\ x^2 \binom{x+k-2}{k-s} &= (k-s+2)(k-s+1) \binom{x+k-2}{k-s+2} + (k-s+1)(5-2s) \cdot \\ &\quad \cdot \binom{x+k-2}{k-s+1} + (s-2)^2 \binom{x+k-2}{k-s} \quad (s=2,3,4); \\ x^3 \binom{x+k-2}{k-t} &= (k-t+3)(k-t+2)(k-t+1) \binom{x+k-2}{k-t+3} + 3(k-t+2) \cdot \\ &\quad \cdot (k-t+1)(3-t) \binom{x+k-2}{k-t+2} + (k-t+1) [3(3-t)(2-t)+1] \binom{x+k-2}{k-t+1} + \\ &\quad + (2-t)^3 \binom{x+k-2}{k-t} \quad (t=3,4); \\ x^4 \binom{x+k-2}{k-4} &= k(k-1)(k-2)(k-3) \binom{x+k-2}{k} - 2(k-1)(k-2)(k-3) \cdot \\ &\quad \cdot \binom{x+k-2}{k-1} + 7(k-2)(k-3) \binom{x+k-2}{k-2} - 15(k-3) \binom{x+k-2}{k-3} + \\ &\quad + 16 \binom{x+k-2}{k-4}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ferner beachte man $y_n(x+2) = \Delta^2 y_n(x) + 2\Delta y_n(x) + y_n(x)$, so daß mit dem Ansatz (2.2)

$$y_n(x+2) = \sum_{k=2}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-2} + 2 \sum_{k=1}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-1} + \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k} \quad (2.5)$$

entsteht. Nach dem Einsetzen von (2.2) in (2.1) und Koeffizientenvergleich bei $\binom{x+n-2}{n}$ ergeben sich die **Eigenwerte**

$$\mu_n = n \left[f_{1,1} + (n-1)f_{2,2} + (n-1)(n-2)f_{3,3} + (n-1)(n-2)(n-3)f_{4,4} \right] \quad (n=0,1,2,\dots). \quad (2.6)$$

Zum Aufbau der (zunächst fünfgliedrigen) Rekursion werden die vier Summanden von (2.1) untersucht, wobei auch das Störglied Verwendung findet:

$$\begin{aligned}
& [f_{1,0} + f_{1,1}x] \sum_{k=1}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-1} = \\
& = \sum_{k=1}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-1} [f_{1,0} + f_{1,1}] + \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k} k f_{1,1}; \\
& [f_{2,0} + f_{2,1}x + f_{2,2}x^2] \sum_{k=2}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-2} - \mu_n \left[\sum_{k=2}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-2} + \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{k=1}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-1} + \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k} \right] = \\
& = \sum_{k=2}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-2} [f_{2,0} - \mu_n] + \sum_{k=1}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-1} [(k-1)f_{2,1} + \\
& \quad + (k-1)f_{2,2} - 2\mu_n] + \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k} [k(k-1)f_{2,2} - \mu_n]; \\
& [f_{3,0} + f_{3,1}x + f_{3,2}x^2 + f_{3,3}x^3] \sum_{k=3}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-3} = \\
& = \sum_{k=3}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-3} [f_{3,0} - f_{3,1} + f_{3,2} - f_{3,3}] + \sum_{k=2}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-2} [(k-2) \cdot \\
& \quad \cdot f_{3,1} - (k-2)f_{3,2} + (k-2)f_{3,3}] + \sum_{k=1}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-1} (k-1)(k-2)f_{3,2} + \\
& \quad + \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k} k(k-1)(k-2)f_{3,3}; \\
& [f_{4,0} + f_{4,1}x + f_{4,2}x^2 + f_{4,3}x^3 + f_{4,4}x^4] \sum_{k=4}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-4} = \\
& = \sum_{k=4}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-4} [f_{4,0} - 2f_{4,1} + 4f_{4,2} - 8f_{4,3} + 16f_{4,4}] + \sum_{k=3}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-3} \cdot \\
& \quad \cdot [(k-3)f_{4,1} - 3(k-3)f_{4,2} + 7(k-3)f_{4,3} - 15(k-3)f_{4,4}] + \sum_{k=2}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-2} \cdot \\
& \quad \cdot [(k-2)(k-3)f_{4,2} - 3(k-2)(k-3)f_{4,3} + 7(k-2)(k-3)f_{4,4}] + \sum_{k=1}^n b_{n,k} \cdot \\
& \quad \cdot \binom{x+k-1}{k-2} [(k-1)(k-2)(k-3)f_{4,3} - 2(k-1)(k-2)(k-3)f_{4,4}] + \\
& \quad + \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k} k(k-1)(k-2)(k-3)f_{4,4}. \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Jetzt ist erkennbar, daß man durch Ausschaltung der Glieder mit dem Faktor $\binom{x+k-2}{k-3}$

und $\binom{x+k-2}{k-4}$ zu einer dreigliedrigen Rekursion gelangen kann. Diese Ausschaltung gelingt durch Erfüllung von

$$f_{3,0} = f_{3,1} - f_{3,2} + f_{3,3}; \quad f_{4,0} = 2f_{4,1} - 4f_{4,2} + 8f_{4,3} - 16f_{4,4}; \quad f_{4,1} = 3f_{4,2} - 7f_{4,3} + 15f_{4,4} \quad (2.8)$$

Außerdem ist noch eine Umformung der verbleibenden Binomialkoeffizienten nötig. Dazu berechnet man

$$\begin{aligned} \binom{x+k-2}{k-1} &= \binom{x+k-1}{k-1} - \binom{x+k-2}{k-2}; \quad \binom{x+k-2}{k} = \\ &= \binom{x+k}{k} - 2 \binom{x+k-1}{k-1} + \binom{x+k-2}{k-2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

und erhält aus (2.7)

$$\begin{aligned} &[f_{1,0} + f_{1,1}x] \sum_{k=1}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-1} = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+k}{k} k f_{1,1} + \sum_{k=1}^n b_{n,k} \binom{x+k-1}{k-1} \cdot \\ &\cdot [f_{1,0} + f_{1,1} - 2k f_{1,1}] + \sum_{k=2}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-2} [-f_{1,0} - f_{1,1} + k f_{1,1}]; \\ &[f_{2,0} + f_{2,1}x + f_{2,2}x^2] \sum_{k=2}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-2} - \mu_n \left[\sum_{k=2}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-2} + 2 \sum_{k=1}^n b_{n,k} \cdot \right. \\ &\cdot \left. \binom{x+k-2}{k-1} + \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k} \right] = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+k}{k} [k(k-1)f_{2,2} - \mu_n] + \\ &+ \sum_{k=1}^n b_{n,k} \binom{x+k-1}{k-1} [f_{2,1} - (2k-1)f_{2,2}](k-1) + \sum_{k=2}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-2} \cdot \\ &\cdot [f_{2,0} - f_{2,1}(k-1) + f_{2,2}(k-1)^2]; \\ &[f_{3,0} + f_{3,1}x + f_{3,2}x^2 + f_{3,3}x^3] \sum_{k=3}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-3} = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+k}{k} \cdot \\ &\cdot k(k-1)(k-2)f_{3,3} + \sum_{k=1}^n b_{n,k} \binom{x+k-1}{k-1} [f_{3,2} - 2k f_{3,3}](k-1)(k-2) + \\ &+ \sum_{k=2}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-2} [f_{3,1} - k f_{3,2} + (k^2 - k + 1)f_{3,3}](k-2); \\ &[f_{4,0} + f_{4,1}x + f_{4,2}x^2 + f_{4,3}x^3 + f_{4,4}x^4] \sum_{k=4}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-4} = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+k}{k} \cdot \\ &\cdot k(k-1)(k-2)(k-3)f_{4,4} + \sum_{k=1}^n b_{n,k} \binom{x+k-1}{k-1} [f_{4,3} - 2(k+1)f_{4,4}](k-1)(k-2) \cdot \\ &\cdot (k-3) + \sum_{k=2}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-2} [f_{4,2} - (k+2)f_{4,3} + (k^2 + k + 5)f_{4,4}](k-2)(k-3). \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen von $y_n(x) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k}$ in die Differenzengleichung (2.1) entsteht insgesamt (man beachte die Erfüllung von (2.8))

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+k}{k} \{k f_{1,1} + k(k-1) f_{2,2} + k(k-1)(k-2) f_{3,3} + k(k-1)(k-2) \cdot \\
& \quad \cdot (k-3) f_{4,4} - \mu_n\} + \\
& + \sum_{k=1}^n b_{n,k} \binom{x+k-1}{k-1} \{f_{1,0} + f_{1,1} - 2k f_{1,1} + (k-1) f_{2,1} - (k-1)(2k-1) f_{2,2} + \\
& + (k-1)(k-2) f_{3,2} - 2k(k-1)(k-2) f_{3,3} + (k-1)(k-2)(k-3) f_{4,3} - 2(k-1) \cdot \\
& \quad \cdot (k-2)(k-3)(k+1) f_{4,4}\} + \\
& + \sum_{k=2}^n b_{n,k} \binom{x+k-2}{k-2} \{-f_{1,0} - f_{1,1} + k f_{1,1} + f_{2,0} - (k-1) f_{2,1} + (k-1)^2 f_{2,2} + \\
& + (k-2)^2 f_{3,1} - k(k-2) f_{3,2} + (k^2 - k + 1)(k-2) f_{3,3} + (k-2)(k-3) f_{4,2} - \\
& - (k-2)(k-3)(k+2) f_{4,3} + (k^2 + k + 5)(k-2)(k-3) f_{4,3}\} = 0. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich bei $\binom{x+k}{k}$ liefert eine **dreigliedrige Rekursion** für die $b_{n,k}$:

$$\begin{aligned}
& b_{n,k} \{k [f_{1,1} + (k-1) f_{2,2} + (k-1)(k-2) f_{3,3} + (k-1)(k-2)(k-3) f_{4,4}] - \\
& - n [f_{1,1} + (n-1) f_{2,2} + (n-1)(n-2) f_{3,3} + (n-1)(n-2)(n-3) f_{4,4}]\} + \\
& + b_{n,k+1} \{f_{1,0} + f_{1,1} - 2(k+1) f_{1,1} + k f_{2,1} - k(2k+1) f_{2,2} + (k-1) k f_{3,2} - \\
& - 2(k-1) k(k+1) f_{3,3} + (k-2)(k-1) k f_{4,3} - 2(k-2)(k-1) k(k+2) f_{4,4}\} + \tag{2.11} \\
& + b_{n,k+2} \{-f_{1,0} - f_{1,1} + (k+2) f_{1,1} + f_{2,0} - (k+1) f_{2,1} + (k+1)^2 f_{2,2} + k^2 f_{3,1} - \\
& - k(k+2) f_{3,2} + (k^2 + 3k + 3) k f_{3,3} + (k-1) k f_{4,2} - (k-1) k(k+4) f_{4,3} + \\
& + (k^2 + 5k + 11)(k-1) k f_{4,4}\} = 0
\end{aligned}$$

($k = n, n-1, \dots, 1, 0$; $b_{n,n} \neq 0$, $b_{n,n+1} = b_{n,n+2} = 0$).

3 Orthogonalität für Polynomlösungen von linearen homogenen Differenzengleichungen vierter Ordnung

In der Differenzengleichung (2.1) setzt man zweckmäßig

$$Q_4(x) = \sigma(x+4), \quad Q_3(x) = \tau(x+3), \quad Q_2(x) = \varphi(x+2), \quad Q_1(x) = \psi(x+1) \tag{3.1}$$

und multipliziert mit $w(x+2)$:

$$\begin{aligned}
& w(x+2)\sigma(x+4)\Delta^4 y_n(x) + w(x+2)\tau(x+3)\Delta^3 y_n(x) + w(x+2)\varphi(x+2)\Delta^2 y_n(x) + \\
& + w(x+2)\psi(x+1)\Delta y_n(x) = w(x+2)\mu_n y_n(x+2) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Wird w so bestimmt, daß die **selbstadjungierte Form**

$$\begin{aligned}
& \Delta^2 \{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\} + \Delta \left\{ \left[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2 (w(x-1)\sigma(x+1)) \right] \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot \Delta y_n(x+1) \right\} = w(x+2)\mu_n y_n(x+2) \tag{3.3}
\end{aligned}$$

aus (3.2) entsteht, dann kann damit die Orthogonalität der Polynomlösungen y_n bezüglich der Gewichtsfunktion w erreicht werden.

Zuerst bringt man die Differenzengleichungen (3.2) und (3.3) zur Übereinstimmung. Unter Verwendung der Produktregeln

$$\Delta [f(x)g(x)] = f(x+1)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x), \quad (3.4)$$

$$\Delta^2 [f(x)g(x)] = f(x+2)\Delta^2 g(x) + 2(\Delta f(x+1))\Delta g(x) + g(x)\Delta^2 f(x) \quad (3.5)$$

berechnen wir

$$\begin{aligned} \Delta^2 \{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\} &= w(x+2)\sigma(x+4)\Delta^4 y_n(x) + 2\left(\Delta [w(x+1)\sigma(x+3)]\right) \cdot \\ &\quad \cdot \Delta^3 y_n(x) + \left(\Delta^2 [w(x)\sigma(x+2)]\right) \Delta^2 y_n(x) \end{aligned}$$

und mit Verwendung von $\Delta y_n(x+1) = \Delta^2 y_n(x) + \Delta y_n(x)$ entsteht

$$\begin{aligned} &\Delta \left\{ \left[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2 (w(x-1)\sigma(x+1)) \right] \left[\Delta^2 y_n(x) + \Delta y_n(x) \right] \right\} = \\ &= \left[w(x+2)\varphi(x+2) - \Delta^2 (w(x)\sigma(x+2)) \right] \left[\Delta^3 y_n(x) + \Delta^2 y_n(x) \right] + \\ &+ \left(\Delta \left[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2 (w(x-1)\sigma(x+1)) \right] \right) \left[\Delta^2 y_n(x) + \Delta y_n(x) \right] = \\ &= \left[w(x+2)\varphi(x+2) - \Delta^2 (w(x)\sigma(x+2)) \right] \Delta^3 y_n(x) + \left\{ w(x+2)\varphi(x+2) - \right. \\ &\quad \left. - \Delta^2 (w(x)\sigma(x+2)) + \Delta \left[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2 (w(x-1)\sigma(x+1)) \right] \right\} \Delta^2 y_n(x) + \\ &\quad + \left(\Delta \left[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2 (w(x-1)\sigma(x+1)) \right] \right) \Delta y_n(x). \end{aligned}$$

Beide Ergebnisse werden zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} &\Delta^2 \{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\} + \\ &\quad + \Delta \left\{ \left[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2 (w(x-1)\sigma(x+1)) \right] \Delta y_n(x+1) \right\} = \\ &= w(x+2)\sigma(x+4)\Delta^4 y_n(x) + \left[w(x+2)\varphi(x+2) + w(x+2)\sigma(x+4) - \right. \\ &\quad \left. - w(x)\sigma(x+2) \right] \Delta^3 y_n(x) + \left[2w(x+2)\varphi(x+2) - w(x+1)\varphi(x+1) - \right. \\ &\quad \left. - w(x+2)\sigma(x+4) + 3w(x+1)\sigma(x+3) - 3w(x)\sigma(x+2) + w(x-1)\sigma(x+1) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \Delta^2 y_n(x) + \left[w(x+2)\varphi(x+2) - w(x+1)\varphi(x+1) - w(x+2)\sigma(x+4) - \right. \\ &\quad \left. - 3w(x+1)\sigma(x+3) + 3w(x)\sigma(x+2) + w(x-1)\sigma(x+1) \right] \Delta y_n(x). \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der Differenzengleichung (3.2) führt bei $\Delta^3 y_n(x)$ auf

$$w(x+2) \left[\varphi(x+2) + \sigma(x+4) - \tau(x+3) \right] = w(x)\sigma(x+2), \quad (3.6)$$

während der Vergleich bei $\Delta^2 y_n(x)$ auf

$$\Delta \left[w(x+1)\varphi(x+1) \right] - \Delta^3 \left[w(x-1)\sigma(x+1) \right] = 0 \quad (3.7)$$

führt. Somit liefert der Vergleich bei $\Delta y_n(x)$

$$w(x+2)\psi(x+1) = 0. \quad (3.8)$$

An die Stelle der **Pearson'schen Differentialgleichungen** ([6]) treten die Differenzengleichungen (3.6), (3.7) und die Forderung $\psi(x+1) = 0$ ($f_{1,0} = f_{1,1} = 0$).

Wird w aus (3.6) und (3.7) bestimmt, dann kann an die Stelle der Differenzengleichung (3.2) mit $\psi(x+1) = 0$ deren selbstadjungierte Form (3.3) treten.

Für die Orthogonalität der Polynomlösungen $y_n(x)$ bezüglich w als **Gewichtsfunktion** multipliziert man die zu n gehörende Differenzengleichung (3.3) mit $y_m(x+2)$ und die zu m gehörende Differenzengleichung (3.3) mit $y_n(x+2)$ ($n, m = 0, 1, 2, \dots$) und erhält nach deren Subtraktion

$$\begin{aligned} & (\mu_n - \mu_m)w(x+2)y_n(x+2)y_m(x+2) = \\ & = \left(\Delta^2 \left\{ w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x) \right\} + \Delta \left\{ \left[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2 (w(x-1)\sigma(x+1)) \right] \cdot \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \cdot \Delta y_n(x+1) \right\} \right) y_m(x+2) - \\ & - \left(\Delta^2 \left\{ w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_m(x) \right\} + \Delta \left\{ \left[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2 (w(x-1)\sigma(x+1)) \right] \cdot \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \cdot \Delta y_m(x+1) \right\} \right) y_n(x+2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Wendet man die partielle Summation

$$\sum_{x=A}^B f(x+1)\Delta g(x) = \left[f(x)g(x) \right]_{x=A}^{B+1} - \sum_{x=A}^B g(x)\Delta f(x) \quad (3.10)$$

($N = B - A \in \mathbb{N}$; $A \rightarrow -\infty$ und $B \rightarrow \infty$ möglich)

und die Produktregel (3.4) auf Teile von (3.9) an, so entstehen

$$\begin{aligned} & \sum_{x=A}^B \left(\Delta^2 \left\{ w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x) \right\} \right) y_m(x+2) = \\ & = \left[\left(\Delta \left\{ w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x) \right\} \right) y_m(x+1) \right]_{x=A}^{B+1} - \\ & \quad - \sum_{x=A}^B \left(\Delta \left\{ w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x) \right\} \right) \Delta y_m(x+1) = \\ & = \left[\left(\Delta \left\{ w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x) \right\} \right) y_m(x+1) \right]_{x=A}^{B+1} - \\ & - \left[\left\{ w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x) \right\} \Delta y_m(x) \right]_{x=A}^{B+1} + \sum_{x=A}^B \left\{ w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\Delta^2 y_m(x) \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

und

$$\begin{aligned}
& \sum_{x=A}^B \left(\Delta \left\{ \left[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2(w(x-1)\sigma(x+1)) \right] \Delta y_n(x+1) \right\} \right) y_m(x+2) = \\
& = \left[\left\{ \left[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2(w(x-1)\sigma(x+1)) \right] \Delta y_n(x+1) \right\} y_m(x+1) \right]_{x=A}^{B+1} - \\
& - \sum_{x=A}^B \left\{ \left[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2(w(x-1)\sigma(x+1)) \right] \Delta y_n(x+1) \right\} \Delta y_m(x+1).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Hier wird klar, warum im Störglied der Differenzengleichung (2.1) $y_n(x+2)$ verwendet wurde: Zieht man entsprechend (3.9) noch die mit m und n vertauschten Teile ab und summiert von A bis B , dann entfallen bezüglich (3.11) die Summen

$$\sum_{x=A}^B \{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\Delta^2 y_m(x)\}$$

und bezüglich (3.12) die Summen

$$\sum_{x=A}^B \left\{ \left[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2(w(x-1)\sigma(x+1)) \right] \Delta y_n(x+1) \right\} \Delta y_m(x+1).$$

Somit ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
& (\mu_n - \mu_m) \sum_{x=A}^B w(x+2)y_n(x+2)y_m(x+2) = \\
& = \left[(\Delta \{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\}) y_m(x+1) - \right. \\
& \quad \left. - \{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\} \Delta y_m(x) + \left(\{w(x+1)\varphi(x+1) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \Delta^2(w(x-1)\sigma(x+1)) \right\} \Delta y_n(x+1) \right) y_m(x+1) \right]_{x=A}^{B+1}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

oder noch in einer anderen Form

$$\begin{aligned}
& (\mu_n - \mu_m) \sum_{x=A}^B w(x+2)y_n(x+2)y_m(x+2) = \\
& = \left[\{w(x+1)\varphi(x+1) - w(x-1)\sigma(x+1)\} (\Delta y_n(x+1)) y_m(x+1) + \right. \\
& \quad + w(x)\sigma(x+2) \{2 [\Delta y_n(x)] y_m(x+1) + [\Delta^2 y_n(x)] y_m(x)\} + \\
& \quad \left. + w(x+1)\sigma(x+3) [\Delta^3 y_n(x) - \Delta y_n(x+1)] y_m(x+1) \right]_{x=A}^{B+1}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Liegt die Verschiedenheit der Eigenwerte μ_n vor, dann hat man Orthogonalität der Polynomlösungen $y_n(x+2)$ von (2.1) bezüglich $w(x+2)$, wenn rechts vom Gleichheitszeichen in (3.13) bzw. (3.14) für $n \neq m$ null entsteht (wegen $\psi(x+1) = f_{1,0} + f_{1,1}x$ gilt $\mu_0 = \mu_1 = 0$, worauf bei der Orthogonalität geachtet werden muß). Das bedingt gewisse Eigenschaften von φ und σ in den „Randpunkten“ A und B . Selbstverständlich sind auch $A \rightarrow -\infty$ und $B \rightarrow \infty$ möglich, wenn w die erforderlichen Konvergenzeigenschaften erzeugt.

Zur Erreichung der Orthogonalität auf $\{A, A+1, \dots, B-1, B\}$ müssen $\varphi(x+1)$, $\sigma(x+1)$, $\sigma(x+2)$ und $\sigma(x+3)$ so gewählt werden, daß einerseits

$$w(x+1)\varphi(x+1) - w(x-1)\sigma(x+1), w(x)\sigma(x+2) \text{ und } w(x+1)\sigma(x+3) \quad (3.15)$$

für $x = A$ und $x = B+1$ ($N = B - A \in \mathbb{N}$; $A \rightarrow -\infty$ und $B \rightarrow \infty$ möglich) null sind, andererseits die beiden Differenzengleichungen (3.6) und (3.7) und $\psi(x+1) = 0$ gelten.

4 Behandlung eines endlichen Spezialfalles

Es wird der einfachste Fall mit $w(x) = 1$ und Orthogonalität auf $\{0, 1, \dots, N\}$ ($A = 0, B = N$) behandelt. Zunächst wählt man σ derart, daß $\sigma(x+3)$ und $\sigma(x+2)$ für $x = 0$ und $x = N+1$ null werden:

$$\begin{aligned} \sigma(x+4) &= (x+1)(x+2)(x-N)(x-N+1) = \\ &= x^4 + 2(2-N)x^3 + (N^2 - 7N + 5)x^2 + (3N^2 - 7N + 2)x + 2N(N-1); \\ \sigma(x+3) &= x(x+1)(x-N-1)(x-N) = \\ &= x^4 - 2Nx^3 + (N^2 - N - 1)x^2 + N(N+1)x; \\ \sigma(x+2) &= (x-1)x(x-N-2)(x-N-1) = \\ &= x^4 - 2(2+N)x^3 + (N^2 + 5N + 5)x^2 - x(N+1)(N+2); \\ \sigma(x+1) &= (x-2)(x-1)(x-N-3)(x-N-2) = \\ &= x^4 - 2(4+N)x^3 + (N^2 + 11N + 23)x^2 - (3N^2 + 19N + 28)x + 2(N+2)(N+3). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Damit liegen die Koeffizienten von $Q_4(x)$ aus (2.3) fest:

$$f_{4,0} = 2N(N-1), f_{4,1} = (N-2)(3N-1), f_{4,2} = N^2 - 7N + 5, f_{4,3} = 2(2-N), f_{4,4} = 1. \quad (4.2)$$

Mit diesen Koeffizienten sind die zweite und dritte Bedingung aus (2.8) erfüllt:

$$\begin{aligned} f_{4,0} - 2f_{4,1} + 4f_{4,2} - 8f_{4,3} + 16f_{4,4} &= \\ &= 2N^2 - 2N - 6N^2 + 14N - 4 + 4N^2 - 28N + 20 - 32 + 16N + 16 = 0, \\ f_{4,1} - 3f_{4,2} + 7f_{4,3} - 15f_{4,4} &= \\ &= 3N^2 - 7N + 2 - 3N^2 + 21N - 15 + 28 - 14N - 15 = 0. \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt berechnen wir $\sigma(1) = 2(N+2)(N+3)$ und $\sigma(N+2) = 2(N-1)N$, setzen $\varphi(x+1) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ und haben $\varphi(1) = \gamma$ und $\varphi(N+2) = \alpha(N+1)^2 + \beta(N+1) + \gamma$. Im Sinne von (3.15) müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} (\varphi(1) - \sigma(1) =) \quad & \gamma - 2(N+2)(N+3) = 0 \\ (\varphi(N+2) - \sigma(N+2) =) \quad & \alpha(N+1)^2 + \beta(N+1) + \gamma - 2(N-1)N = 0 \end{aligned}$$

gelten; daraus folgen $\gamma = 2(N+2)(N+3)$ und $\alpha(N+1) + \beta = -12$.

Ferner muß die Differenzengleichung (3.7) erfüllt werden. Dazu berechnen wir $\Delta\varphi(x+1) = 2\alpha x + \alpha + \beta$ und $\Delta^3\sigma(x+1) = 12(2x - N - 1)$ und haben für (3.7)

$$(\Delta\varphi(x+1) - \Delta^3\sigma(x+1) =) \quad (2\alpha - 24)x + \alpha + \beta + 12(N+1) = 0.$$

Das liefert $\alpha = 12$ und $\beta = -12(N+2)$ (im Einklang mit $\alpha(N+1) + \beta = -12$), so daß sich

$$\varphi(x+1) = 12x^2 - 12(N+2)x + 2(N+2)(N+3) \text{ und } \varphi(x+2) = 12x^2 - 12Nx + 2N(N-1) \quad (4.3)$$

ergeben. Damit liegen die Koeffizienten von $Q_2(x)$ aus (2.3) fest:

$$f_{2,0} = 2N(N-1), \quad f_{2,1} = -12N, \quad f_{2,2} = 12. \quad (4.4)$$

Es bleibt die Erfüllung der Differenzengleichung (3.6), wobei $\tau(x+3)$ festgelegt wird:

$$\tau(x+3) = \varphi(x+2) + \sigma(x+4) - \sigma(x+2) = 8x^3 - 12(N-1)x^2 + 4(N^2 - 4N + 1)x + 4N(N-1). \quad (4.5)$$

Damit liegen die Koeffizienten von $Q_3(x)$ aus (2.3) fest:

$$f_{3,0} = 4N(N-1), \quad f_{3,1} = 4(N^2 - 4N + 1), \quad f_{3,2} = -12(N-1), \quad f_{3,3} = 8. \quad (4.6)$$

Mit diesen Koeffizienten ist die erste Bedingung aus (2.8) erfüllt:

$$f_{3,0} - f_{3,1} + f_{3,2} - f_{3,3} = 4N^2 - 4N - 4N^2 + 16N - 4 - 12N + 12 - 8 = 0.$$

Wegen $\psi(x+1) = 0$ liegen noch $f_{1,0} = f_{1,1} = 0$ fest.

Damit liegt folgende Differenzengleichung vierter Ordnung vor:

$$\begin{aligned} & \left[2N(N-1) + (N-2)(3N-1)x + (N^2 - 7N + 5)x^2 - 2(N-2)x^3 + x^4 \right] \Delta^4 y_n(x) + \\ & + \left[4N(N-1) + 4(N^2 - 4N + 1)x - 12(N-1)x^2 + 8x^3 \right] \Delta^3 y_n(x) + \\ & + \left[2N(N-1) - 12Nx + 12x^2 \right] \Delta^2 y_n(x) = \\ & = \mu_n y_n(x+2) \quad \text{mit } \mu_n = (n-1)n(n+1)(n+2) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die dreigliedrige Rekursion (2.11) erhält folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} & b_{n,k} \left\{ (k-1)k(k+1)(k+2) - (n-1)n(n+1)(n+2) \right\} - \\ & - b_{n,k+1} 2k(k+1)(k+2)(N+k+2) + \\ & + b_{n,k+2} (k+1)(k+2)(N+k+2)(N+k+3) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

($k = n, n-1, n-2, \dots, 1, 0$; $b_{n,n} \neq 0$, $b_{n,n+1} = b_{n,n+2} = 0$).

Zur Berechnung der $b_{n,k}$ ist noch folgende Umformung der Rekursion zweckmäßig:

$$(n-k)(n-k+1) \left[n(n+1) + (k-1)(k+2) \right] b_{n,k} + (k+1)(k+2)(N+k+2) \cdot \quad (4.9)$$

$$\cdot \left[2k b_{n,k+1} - (N+k+3) b_{n,k+2} \right] = 0$$

($k = n, n-1, n-2, \dots, 1, 0$; $b_{n,n} \neq 0, b_{n,n+1} = b_{n,n+2} = 0$). Man findet damit

$$b_{n,n-1} = -\frac{N+n+1}{2} b_{n,n}$$

und

$$b_{n,k} = (-1)^{n-k} \frac{(n-1)(n-2) \dots (k+1)(N+n+1)(N+n) \dots (N+k+2)}{2(n-k)!(2n-1)(2n-2) \dots (n+k+1)} b_{n,n} \quad (4.10)$$

($k = n-2, n-3, \dots, 1, 0$), so daß folgende Lösungspolynome von (4.7) entstehen:

$$y_n(x) = \left\{ \binom{x+n-2}{n} + \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j \binom{N+n+1}{j} \binom{n-1}{j-1}}{2 \binom{2n-1}{j-1}} \binom{x+n-2-j}{n-j} \right\} b_{n,n} \quad (4.11)$$

($n = 1, 2, \dots$) und $y_0(x) = 1$; diese werden mit $b_{n,n} = n!$ monisch.

Wir geben die (monischen) Polynome $y_n(x)$ und $y_n(x+2)$ ($n = 1, 2, 3, 4$) an:

$$y_1(x) = x - \frac{N+4}{2}, \quad y_1(x+2) = x - \frac{N}{2};$$

$$y_2(x) = x^2 - (N+4)x + \frac{(N+3)(N+8)}{6}, \quad y_2(x+2) = x^2 - Nx + \frac{(N-1)N}{6};$$

$$y_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}(N+4)x^2 + \frac{1}{10}(6N^2 + 57N + 122)x - \frac{1}{20}(N+3)(N+4)(N+14),$$

$$y_3(x+2) = x^3 - \frac{3}{2}Nx^2 + \frac{1}{10}(6N^2 - 3N + 2)x - \frac{1}{20}(N^3 - 3N^2 + 2N);$$

$$y_4(x) = x^4 - 2(N+4)x^3 - \frac{1}{7}(9N^2 - 81N + 173)N^2 -$$

$$- \frac{1}{7}(2N^3 + 33N^2 + 161N + 244)x + \frac{1}{70}(N+3)(N+4)(N+5)(N+22),$$

$$y_4(x+2) = x^4 - 2Nx^3 + \frac{1}{7}(9N^2 - 3N + 5)x^2 - \frac{N}{7}(2N^2 - 3N + 5)x +$$

$$+ \frac{N}{70}(N^3 - 6N^2 + 11N - 6).$$

Man beachte, daß im konstanten Glied von $y_n(x+2)$ ($n = 1, 2, 3, 4$) nur Potenzen von N vorkommen.

Die (monischen) Lösungspolynome (4.11) betrachten wir im Hinblick auf die Orthogonalität in der Form

$$y_n(x+2) = \sum_{j=0}^n \alpha_{n,j}(x+2)^j \quad (n = 0, 1, 2, \dots; \alpha_{n,n} = 1). \quad (4.12)$$

Zur Berechnung der **dreigliedrigen Rekursion****

$$\begin{aligned} y_0(x+2) &= 1, \quad y_1(x+2) = x+2 - c_0, \quad y_{n+1}(x+2) = \\ &= (x+2 - c_n)y_n(x+2) - d_n y_{n-1}(x+2) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (4.13)$$

setzt man (4.12) in (4.13) ein und erhält durch Koeffizientenvergleich bei $(x+2)^n$ und $(x+2)^{n-1}$

$$\begin{aligned} c_0 &= -\alpha_{1,0}; \quad c_n = \alpha_{n,n-1} - \alpha_{n+1,n}; \quad d_n = \alpha_{n,n-2} - \alpha_{n+1,n-1} - c\alpha_{n,n-1} \\ &\quad (n = 1, 2, 3, \dots; \alpha_{1,-1} = 0). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Zur Aufstellung der Rekursion genügen also $\alpha_{n,n-1}$ und $\alpha_{n,n-2}$. In diesem Sinne werden die entsprechenden Koeffizienten aus (4.11) berechnet:

$$\begin{aligned} \binom{x+n}{n} n! &= (x+n)(x+n-1)\dots(x+1) = \\ &= x^n + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} + \frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{24}x^{n-2} + \dots; \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j \binom{N+n+1}{j} \binom{n-1}{j-1}}{2 \binom{2n-1}{j-1}} \binom{x+n-j}{n-j} n! &= \\ &= -\frac{n(N+n+1)}{2}x^{n-1} - \frac{n^2(n-1)(N+n+1)}{4}x^{n-2} - \dots + \\ &\quad + \frac{n(n-1)^2(N+n)(N+n+1)}{4(2n-1)}x^{n-2} + \dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

Damit entstehen

$$\alpha_{n,n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(N+n+1)}{2} = -\frac{nN}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots; \alpha_{1,1} = 1)$$

und

$$c_0 = -\alpha_{1,0} = \frac{N}{2}, \quad c_n = \alpha_{n,n-1} - \alpha_{n+1,n} = -\frac{nN}{2} + \frac{(n+1)N}{2} = \frac{N}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.17)$$

** Analog wie in [8] kann die Existenz einer dreigliedrigen Rekursion gezeigt werden.

Ferner ergibt sich

$$\alpha_{n,n-2} = \frac{n(n-1)}{24(2n-1)} \left\{ 6(n-1)N^2 - 6N + (n-2)(n+1) \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots; \alpha_{1,-1} = 0)$$

zur Berechnung von

$$\begin{aligned} d_n &= \alpha_{n,n-2} - \alpha_{n+1,n-1} - c_n \alpha_{n,n-1} = -\frac{n}{4(4n^2-1)} \left\{ (n-1)^2(2n+1)N^2 - \right. \\ &\quad - (n-1)(2n+1)N + \frac{1}{6}(n-2)(n^2-1)(2n+1) - n(n+1)(2n-1)N^2 + \\ &\quad \left. + (n+1)(2n-1)N - \frac{1}{6}(n^2-1)(n+2)(2n-1) \right\} + \frac{nN^2}{4} = \\ &= \frac{n}{4(4n^2-1)} \left\{ (-4n^2+n+1)N^2 + 2nN - n(n^2-1) \right\} + \frac{nN^2}{4} = \\ &= -\frac{nN^2}{4} + \frac{n^2(N+1-n)(N+1+n)}{4} + \frac{nN^2}{4} = \frac{n^2(N+1-n)(N+1+n)}{4(4n^2-1)} \\ &\quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Nun wird die mit dem Satz von Favard zusammenhängende Theorie für positiv definite (endliche) Orthogonalsysteme herangezogen ([8]).

Man erkennt, daß die d_n für $n = 1, 2, \dots, N$ positiv sind, während $d_{N+1} = 0$ ist, so daß nur ein endliches positiv definites Orthogonalsystem mit $N+1$ Polynomen entstehen kann.

Für die (positiven) Normierungsfaktoren $\sigma_n = d_0 d_1 \dots d_n$ mit $d_0 = \sum_{x=0}^N y_0(x) = N+1$ ergibt sich

$$\sigma_n = \binom{N+1+n}{2n+1} \frac{(2n+1)!}{4^n} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{4k^2-1} \quad (n = 1, 2, \dots, N; \sigma_0 = N+1); \tag{4.19}$$

also hat man für die Polynomlösungen $y_n(x+2)$ von (4.7) die **Orthogonalitätsrelation**

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^N 1 \cdot y_n(x+2) \cdot y_m(x+2) &= \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m, \\ \binom{N+1+n}{2n+1} \frac{(2n+1)!}{4^n} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{4k^2-1} & \text{für } n = m (\neq 0), \\ N+1 & \text{für } n = m (=0) \end{cases} \end{aligned} \tag{4.20}$$

$(n, m = 0, 1, \dots, N)$.

Literatur

- [1] **Krall, H.L.:** Certain differential equations for Tschebyscheff polynomials,
Duke Math. J. 4 (1938), 705-718.
- [2] **Krall, H.L.:** On orthogonal polynomials satisfying a certain fourth order
differential equation,
The Pennsylv. State Coll. Bull. 34 (1940), 3-24.
- [3] **Krall, A.M.:** Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential
equations,
Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sec. A. 87 (1981), 271-288.
- [4] **Krall, A.M.:** Hilbert Space, Boundary Value Problems and Orthogonal
Polynomials,
Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin (2002).
- [5] **Everitt, W.N., Littlejohn, L.L.:** Differentialoperators and the Legendre
type polynomials
Diff. Int. Equations 1 (1988), 97-116.
- [6] **Lesky, P.A.:** Eigenwertprobleme mit Differentialgleichungen vierter Ordnung
für die kontinuierlichen klassischen Orthogonalpolynome,
Sb. Öst. Akad. Wiss. math. nat. Kl. Abt.II 206 (1997), 127-139.
- [7] **Lesky, P.A.:** Eigenwertprobleme mit Differentialgleichungen vierter Ordnung
für die Orthogonalpolynome vom Laguerretyp, Legendretyp
und Jacobityp,
Sb. Öst. Akad. Wiss. math. nat. Kl. Abt.II 207 (1998), 23-34.
- [8] **Lesky, P.A.:** Eine Charakterisierung der klassischen kontinuierlichen-,
diskreten- und q -Orthogonalpolynome,
Shaker Verlag, Aachen (2005), 322 S.

Adresse des Autors: Peter A. Lesky, G. Hauptmannstr. 4, A 6020 Innsbruck
oder: Universität Stuttgart/Mathematik,
Pfaffenwaldring 57, D 70569 Stuttgart.
E-Mail: pa.lesky @ mathematik.uni-stuttgart.de

Erschienene Preprints ab Nummer 2004/001

Komplette Liste: <http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/preprints>

- 2004/001 *Walk, H.:* Strong Laws of Large Numbers by Elementary Tauberian Arguments.
- 2004/002 *Hesse, C.H., Meister, A.:* Optimal Iterative Density Deconvolution: Upper and Lower Bounds.
- 2004/003 *Meister, A.:* On the effect of misspecifying the error density in a deconvolution problem.
- 2004/004 *Meister, A.:* Deconvolution Density Estimation with a Testing Procedure for the Error Distribution.
- 2004/005 *Efendiev, M.A., Wendland, W.L.:* On the degree of quasiruled Fredholm maps and nonlinear Riemann-Hilbert problems.
- 2004/006 *Dippon, J., Walk, H.:* An elementary analytical proof of Blackwell's renewal theorem.
- 2004/007 *Mielke, A., Zelik, S.:* Infinite-dimensional hyperbolic sets and spatio-temporal chaos in reaction-diffusion systems in $\mathbb{R}^n$.
- 2004/008 *Exner, P., Linde, H., Weidl T.:* Lieb-Thirring inequalities for geometrically induced bound states.
- 2004/009 *Ekholm, T., Kovarik, H.:* Stability of the magnetic Schrödinger operator in a waveguide.
- 2004/010 *Dillen, F., Kühnel, W.:* Total curvature of complete submanifolds of Euclidean space.
- 2004/011 *Afendikov, A.L., Mielke, A.:* Dynamical properties of spatially non-decaying 2D Navier-Stokes flows with Kolmogorov forcing in an infinite strip.
- 2004/012 *Pöschel, J.:* Hill's potentials in weighted Sobolev spaces and their spectral gaps.
- 2004/013 *Dippon, J., Walk, H.:* Simplified analytical proof of Blackwell's renewal theorem.
- 2004/014 *Kühnel, W.:* Tight embeddings of simply connected 4-manifolds.
- 2004/015 *Kühnel, W., Steller, M.:* On closed Weingarten surfaces.
- 2004/016 *Leitner, F.:* On pseudo-Hermitian Einstein spaces.
- 2004/017 *Förster, C., Östensson, J.:* Lieb-Thirring Inequalities for Higher Order Differential Operators.
- 2005/001 *Mielke, A., Schmid, F.:* Vortex pinning in super-conductivity as a rate-independent model
- 2005/002 *Kimmerle, W.; Luca, F., Raggi-Cárdenas, A.G.:* Irreducible Components of the Burnside Ring
- 2005/003 *Höfert, C.; Kimmerle, W.:* On Torsion Units of Integral Group Rings of Groups of Small Order
- 2005/004 *Röhl, N.:* A Least Squares Functional for Solving Inverse Sturm-Liouville Problems
- 2005/005 *Borisov, D.; Ekholm, T; Kovarik, H.:* Spectrum of the Magnetic Schrödinger Operator in a Waveguide with Combined Boundary Conditions
- 2005/006 *Zelik, S.:* Spatially nondecaying solutions of 2D Navier-Stokes equation in a strip
- 2005/007 *Meister, A.:* Deconvolving compactly supported densities
- 2005/008 *Förster, C., Weidl, T.:* Trapped modes for an elastic strip with perturbation of the material properties
- 2006/001 *Dippon, J., Schiemert, D.:* Stochastic differential equations driven by Gaussian processes with dependent increments
- 2006/002 *Lesky, P.A.:* Orthogonale Polynomlösungen von Differenzengleichungen vierter Ordnung